ショートノート

ロバスト解探索型遺伝的アルゴリズムの多次元空間における性質について

On Properties of the Genetic Algorithms with a Robust Solution Searching Scheme in Multidimensional Search Spaces

筒井茂義 Shigeyoshi TSUTSUI

阪南大学経営情報学部経営情報学科

Dept. of Management and Information Science, Hannan University, Osaka 580, Japan

Keywords: genetic algorithm, robust solution, Gaussian noise, multidimensional search space

Summary

Many of the studies on GAs give emphasis on finding the global optimal solution. If a global optimal solution found is on a sharp-pointed location, there may be cases where it is dangerous to use this solution. In the previouse paper, we have proposed the GA/RS^3 (GA with a Robust Solution Seraching Scheme) which extend the application of GAs to domains that require robust solutions, and its analytical and experimental study has been made limitting the search space to be one dimensional case. In this paper, we extend it to multidimensional case.

１．はじめに

遺伝的アルゴリズム（ＧＡ）は，各種の探索問題や最適化問題においてその有効性が明らかにされてきた[Goldberg 89]．また，多峰性問題やだまし問題をはじめ各種のＧＡ困難な問題を解くことやＧＡの性能の向上を図るため，多くの理論的，実験的研究が行われている[Eshelman 91, Goldberg 89, Mathias 94, 筒井 96, Ono 97]．これらの研究では，主としてグローバル最適解を求めることにその重点がおかれている．一方，ローカル最適解も含めて複数の解を求めることに重点をおく研究も行われている[Goldberg 89]．これらのアプローチは，最適解を含む複数の解候補を検出しなければならない問題領域にＧＡの適用を拡張しているという点で注目される．

筆者らは先に，パラメータ変動の影響を受けることが少ない領域の解を探索する新しいＧＡの方式である「ロバスト解探索型遺伝的アルゴリズム」（以下，GA/RS^3: Genetic Algorithm with a Robust Solution Searching Scheme）の基礎提案を行い，一次元探索空間における性質について解析的および実験的検討を行った[筒井 97b］．しかし，その多次元探索空間での性質については今後の検討課題として残された．以下本稿では，次元数の増加に対するスケー

ルアップ特性を示しGA/RS^{3}の多次元探索空間における性質を明らかにする［筒井 97a］.

２.GA/RS^{3}の概要［筒井97b］

本章では, 先に提案したGA/RS^{3}のアプローチと得られた結果について簡単に述べ，本稿の準備とする.

（１）GA/RS^{3}の構成

ある探索手法によって得られた解の評価値がパラメータ変動の影響を受けやすい場合, その解を採用することが好ましくない場合がある. 例えば，機械設計では，評価の高い設計をしても，それが実現不可能なほどの精度を要求するとすれば無意味となる．また制御問題にしても操作量は当然誤差を含むので，この誤差に対して敏感な応答特性を持つ領域での操作値の設定は適当でない．このように多くの実際の最適化問題では，パラメータ変動に対して評価値の変動が少ない安定した解を求めることが重要となる場合が多い．本研究では，このようなパラメータ変動に対して評価値の変動が少ない安定した解のことを「ロバスト解」と呼んでいる．GA/RS^{3}では，ＧＡの実行中の適応度関数$f(X)$の計算において$f(X+\Delta)$という形で表現型空間のパラメータ値にノイズを加える方法をとる（図１参照）．ただ

し，表現型パラメータベクターを$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$，$\Delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$はノイズベクタである．図１において$G^i$は，個体$i$のストリング（染色体）であり，その表現型パラメータがX^iである．Nは個体数を示す． なお，$f(X+\Delta)$の形でノイズΔをパラメータXに加えることは，表現型パラメータ空間における突然変異操作のような形となっている．しかし，$X+\Delta$の形によって加えられた外乱は，関数評価のためにのみ用いられ，遺伝子型空間の表現であるストリングGに直接的な影響を与えないという点で突然変異操作とは根本的に異なっている．

【図１】

（２） 実効適応度関数

GA/RS^{3}においては，適応度関数の計算においてノイズが付加されるため，適応度関数の値は確率的に変動する．表現型パラメータを１次元としパラメータベクターXをスカラーxで表す．このとき， 世代tにおける個体群$P(t)$におけるスキーマHの数の期待値を$M(H,t)$で表すと，図１のように$f(x+\delta)$の形で適応度関数が評価されるGA/RS^{3}のスキーマ定理[Goldberg 89]，

$$M(H, t+1) \geq M(H, t) \cdot \frac{f'(H, t)}{f'(t)}(1-\varepsilon) \tag{1}$$

を考えよう．ここで，$f'(H,t)$：スキーマHの適応度，$\overline{f'(t)}$は$P(t)$における個体の平均適応度であり，またεは，交叉，突然変異オペレータの適用に伴うスキーマHの破壊される割合である．ここで，個体数が$N\to\infty$の時，$\overline{f'(t)}$は，次式のように記述できる．

$$\begin{aligned}\overline{f'(t)} &= \sum_{i\in N} f(x^i+\delta^i)/N \\ &= \int_x\int_\delta f(x+\delta)\cdot p(x,t)\cdot q(\delta)d\delta dx \\ &= \int_x\left[\int_\delta f(x+\delta)\cdot q(\delta)d\delta\right]\cdot p(x,t)dx \\ &= \int_x F(x)\cdot p(x,t)dx\end{aligned} \tag{2}$$

ただし，ここでx^iとδ^iとは互いに独立であり，$q(\delta)$はノイズδの密度関数で平均値を持つとしている．また$p(x,t)$は，世代tの個体群$P(t)$における個体の表現型パラメータxの密度関数であり，また，$F(x)$は，

$$F(x)\equiv\int_\delta f(x+\delta)\cdot q(\delta)d\delta \tag{3}$$

とおいている．同様に，$f'(H,t)$も，

$$f'(H,t)=\int_x F(x)\cdot p(x,H,t)dx \tag{4}$$

と表される．ただし，$p(x,H,t)$は，$P(t)$におけるスキーマHに含まれる個体の表現型パラメータxの密度関数である．

　式2および4をスキーマ定理の式1に代入すると，GA/RS[3]におけるスキーマの変化は，適応度関数が$f(x)$に代わっ

て実質的に式３で表される$F(x)$で評価されたものになっていることが分かる．ここでは，個体数は$N \to \infty$を仮定したが，Nが有限であっても十分大きい値のときには，式２および４は近似として成立する．一般に近似として必要なNの値の大きさはノイズの分布に依存する．なお，４章の実験では，$N=200$のとき予測されたGA/RS^{3}の特性を示す結果が得られている．GA/RS^{3}では，式３で定義される関数$F(x)$を$f(x)$の「実効適応度関数」と呼んでいる．式３から分かるように$F(x)$は，xに密度関数が$q(\delta)$の表現型ノイズδが入ったときの$f(x)$の期待値に等しい．

式３において$q(\delta)$は偶関数，すなわち$q(\delta) = q(-\delta)$であると仮定して変形すると，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y) f(y) dy . \tag{5}$$

が得られる．ノイズの分布としてGA/RS^{3}ではガウスノイズ$N(0,\sigma)$を仮定すると式５は，畳み込み積分の形となっているので信号処理システムにおける「ローパスパスフィルタ」のような効果を生じさせる．ノイズの標準偏差σが大きくなるに従って，ローパスフィルタとしての効果が増大する．

（３） 減衰ファクタ

表現型パラメータに加えるノイズの必要な大きさについ

ての推定は以下のように行える．解析の容易さのため次式で表されれる幅$2w$，高さhからなる短形の適応度関数を取り上げ，まずその実効適応度関数を計算する．

$$f(x) = \begin{cases} h: & -w \le x \le w \\ 0: & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{6}$$

式６の実効適応度関数$F(x)$は，式５から以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} F(x) &= h\int_{-w}^{w} q(x-y)dy \\ &= h\left[\Phi\left(\frac{x+w}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-w}{\sigma}\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\Phi(y)$は標準正規分布N(0,1)の分布関数である．容易に分かるように，式７の最大値$\max F(x)$は，$x = 0$のとき得られ，

$$\begin{aligned} \max F(x) &= h\left[2\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) - 1\right] \\ &= h \times R\left(\frac{w}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここで，$R(w/\sigma)$は「減衰ファクタ」と呼ばれる．$R(w/\sigma)$とw/σとの関係は，３章図２の１次元の場合（n = 1）の通りである．図２から必要なノイズの大きさを推定することができる．一つのピークを，幅$2w$，高さhの短形で代表させるとすと，たとえば，σの値を$2w$～$4w$の範囲に設定すると，w/σは，0.5～0.25であり，ピークの実効的高さは$0.197h$～$0.383h$となる．逆にピークの幅とそれ

に対する減衰ファクタの値を決めるとノイズの大きさσを決定することができる．ただしここで，ピークの幅とそれに対する減衰ファクタの値は，設計目標として与えられるものとする．

３．多次元探索空間におけるGA/RS^{3}の解析

本章では，パラメータの次元数をnとした場合において，一つのピークを式３のn次元への拡張である超柱状関数で代表させてとき，もとのピークの高さに対するノイズの付加による減衰の割合（減衰ファクタ）を求め，GA/RS^{3}の多次元探索空間における性質を明らかにする．

n次元探索空間Xにおける実効適応度関数$F(X)$は，式２および４をそのまま$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$と拡張することにより，

$$F(X)=\int_{\delta_1}\cdots\int_{\delta_n} f(x_1+\delta_1,\cdots,x_n+\delta_n)q_1(\delta_1)\cdots q_n(\delta_n)d\delta_1\cdots d\delta_n \qquad (9)$$

として得られる．ここで，各次元に加えられるノイズの密度関数をそれぞれ$q_1(\delta_1),..,q_n(\delta_n)$で表し，またそれらは相互に独立で平均値を持つとしている．式５の場合と同様，式９において各$q_i(\delta_i)$は偶関数あると仮定して変形すると，

$$F(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}q_1(x_1-y_1)\cdots q_n(x_n-y_n)f(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n \quad (10)$$

が得られる．つぎに，n次元探索空間における一つのピークを１次元の場合の短形関数（式６）のn次元への拡張である超柱状関数,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}h: & \bigwedge_{i=1,\cdots,n} -w_i \le x_i \le w_i \\ 0: & \text{otherwise}.\end{cases} \quad (11)$$

で表し，その実効適応度関数$F(X)$を計算しよう．直ちに分かるように式１１は,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=hf_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \quad (12)$$

と表せる．ただし,

$$f_i(x_i)=\begin{cases}1: -w_i \le x_i \le w_i \\ 0: \ \text{otherwise}\end{cases} \quad (13)$$

である．したがって，各$q_i(\delta_i)$の分布を式７と同様正規分布$N(0,\sigma_i)$と仮定すると，式１１の実効適応度関数$F(X)$は，式１２を式１０に代入することによって,

$$\begin{aligned}F(X)&=h\int_{-\infty}^{\infty}q_1(x_1-y_1)f_1(y_1)dy_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}q_n(x_n-y_n)f_n(y_n)dy_n \\ &=h\int_{-w_1}^{w_1}q_1(x_1-y_1)dy_1\cdots\int_{-w_n}^{w_n}q_n(x_n-y_n)dy_n \\ &=h\prod_{i=1}^{n}\left[\Phi\left(\frac{x_i+w_i}{\sigma_i}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-w_i}{\sigma_i}\right)\right]\end{aligned} \quad (14)$$

として得られる．ただし，$\Phi(y)$は，式７と同様，標準正規分布N(0,1)の分布関数である．

式１４において積の各項は相互に独立であるので，式１４の最大値max$F(X)$は，式８と同様，$x_i = 0$ (i = 1, 2,..., n)のときであり，n次元の場合の減衰ファクタR_nは，

$$R_n = \max F(X)/h = \prod_{i=1}^{n} R\left(\frac{w_i}{\sigma_i}\right) \tag{15}$$

として得られる．ただし，$R(w_i/\sigma_i)$は，

$$R\left(\frac{w_i}{\sigma_i}\right) = \left[2\Phi\left(\frac{w_i}{\sigma_i}\right) - 1\right] \tag{16}$$

と定義される．このように多次元探索空間における減衰ファクタR_nの値は，各次元の減衰ファクタの値$R(w_i/\sigma_i)$を累乗したものとなる．図２は，減衰ファクタR_nとw_i/σ_iとの関係をプロットしたものである．ただし，各次元のパラメータに加えるノイズの大きさを同じとした場合である．多次元の減衰ファクタR_nをもとにして２章で述べた１次元の場合と同様にして各次元に加えるノイズの大きさについての推定を行うことができる．ある次元 i に関してはロバスト性を必要としないという場合には次元 i にはノイズを加えなくてもよく，$\sigma_i = 0$，すなわち，式１５で次元 i においてR(w_i/σ_i)=1と考えればよい．

【図２挿入】

４．実験

４．１　実験関数と条件

ここでは３章で解析したGA/RS^{3}の多次元での性質を確認するために先の論文［筒井 97b］で用いた関数を一部変更し，２次元に拡張した関数

$$f(x_1, x_2) = e^{-\frac{|x_1-0.1|+|x_2-0.1|}{2}} \sin^{m_1}(5\pi x_1) \sin^{m_2}(5\pi x_2) \tag{17}$$

を用いてロバスト解を得る実験を行う．ただし，i=1,2に対して，$0.4 < x_i < 0.6$ のとき $m_i = 1$，$0 \leqq x_i \leqq 0.4$ または $0.6 \leqq x_i \leqq 1$ のとき $m_i = 6$ である．

この関数は探索範囲（$0 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$）において図４に示すように２５のピークが存在する．ここでは，これらの各ピークを x_1 軸方向には左から1, 2, 3, 4, 5，また，x_2 軸方向には下から1, 2, 3, 4, 5と番号を付け，それらの組み合わせで指定することにする．明らかにピーク（１，１）がもっとも高く，高さが１であるが急峻なピークで，その座標は(0.1, 0.1)である．ピーク（３，３）は，他の２４個のピークと比べて x_1，x_2 方向とも平坦な形状をしており，ロバスト解の一つであると考えられる．座標は(0.5, 0.5)であり，ピーク値は0.670である．一方，ピーク（１，３）は，x_2 方向には平坦な形状をしているが，x_1 方向には急峻な形状

をしており，その座標は(0.1, 0.5)でピーク値は0.819である．逆にピーク（３，１）は，x_1方向には平坦な形状をしているがx_2方向には急峻な形状をしており，その座標は(0.1, 0.5)でピーク値は同じく0.819である．ここでは，つぎの２つのケースの場合を実験する．

（１）ケース１：パラメータx_1, x_2の両方にノイズを付加の場合

この関数の急峻なピーク（１，１）の実効的な幅$2w_1 = 2w_2$は，このピークを体積が等価な柱状体で，近似することにより，

$$\begin{aligned} 1\times 2w_1 \times 2w_2 &= 1\times \int_0^{0.2}\int_0^{0.2} \sin^6(5\pi x_1)\sin^6(5\pi x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= (1/16)^2 \end{aligned} \tag{18}$$

から，$w_1=w_2=1/32$と概算できる．同様に，平坦なピーク（３，３）の実効的な幅$2w_1 = 2w_2$は，

$$\begin{aligned} 1\times 2w_1 \times 2w_2 &= 1\times \int_0^{0.2}\int_0^{0.2} \sin(5\pi x_1)\sin(5\pi x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= (2/5\pi)^2 \end{aligned} \tag{19}$$

から，$w_1 = w_2 = 1/5\pi$と概算できる．急峻なピーク（１，１）の実効適応度関数値を元の適応度関数値の約20%に減衰させると設定する場合を考えよう．このとき図２から，i=1, 2に対してw_i/σ_iを約0.6とすればよいことが分かる．この結果，σ_iは，$\sigma_i = w_i/0.6 \approx 0.052$となる．この$\sigma_i$の値の

とき，平坦なピーク（３，３）に対する減衰ファクタは，$w_i/\sigma_i = 1/5\pi\sigma_i = 1.22$ であることを利用して，図２から0.604となり，実効適応度関数の値は，ピーク（１，１）の１×0.4=0.4に対してピーク（３，３）は，0.670×0.604=0.405と最も大きくなる．この結果，$\sigma_i = 0.052$ のガウスノイズを加えたGA/RS[3]は，ピーク（３，３）に集団を収束させることになると予測される．

（２）ケース２：パラメータ x_2 にのみノイズを付加の場合

式１６の問題において，パラメータ x_1 は，ロバスト性を必要としないとし，パラメータ x_2 に対するロバスト性のみが要求される場合を考える．この場合，パラメータ x_1 にノイズは加える必要がない，すなわち，$\sigma_1=0$ で，$R(w_1/\sigma_1)=1$ である．従って減衰ファクタは，パラメータ x_2 の成分 $R(w_2/\sigma_2)$ のみで決定される．先の場合と同じ $\sigma_2 = 0.052$ とすると，ピーク（１，３）の減衰ファクタは，$w_2/\sigma_2 = 1/5\pi\sigma_2 = 1.22$ であることを利用して，図２から0.778となる．したがって，ピーク（１，３）の実効適応度の関数の値は，0.819×0.778 = 0.637と最も大きくなり，GA/RS[3]は，ピーク（１，３）に集団が収束することになると予測される．

４．２　実験結果

本実験では，ＧＡの基本モデルに単純ＧＡを用い，パラメータは，突然変異率 $p_m = 0.006$，交叉率 $p_c = 0.6$，最大関数評価回数（Trials）= 20,000 とする．また，x_1, x_2 にそれぞれ１５ビットを用い，ストリング長 = 30（グレイコード）とした．集団サイズ N に関しては，前報の $N = 100$ では実験毎の変動が大きく安定した収束特性が得られなかったので，$N = 200$ として実験した．$N = 200$ のときには安定した収束特性を示した. 実験は各場合についてそれぞれ３０回行った.

図３は，各個体の表現型パラメータ x_1，x_2 の集団における平均値の推移過程を示す. 値は３０回の実験の平均値である．単純ＧＡでは，ピーク（１，１）に平均値が収束している．これに対して GA/RS³ では，ケース１のとき予測通りピーク（３，３）に平均値が収束している．探索過程におけるこの平均値の推移をみると，一次元の場合［筒井 97b］と同様，探索の初期の段階では平均値は最も高いピーク（１，１）の領域，すなわち $x_1 = x_2 = 0.1$ の方向に向かい，その後，ピーク（３，３）の方向に向きを変えてそのピークに収束している．これは探索の初期の段階では, 集団の多様性が大きいためノイズを付加することの影

響が実質的に現れない．その後，収束するにしたがって，ノイズの効果が現れ，実効的適応度関数が最大となる領域に個体群が収束していくため考えられる．これも一次元の場合と同様の結果である．ケース２では，RS^3/GAでは，予測通りピーク（１，３）に平均値が収束している．

図４は，単純ＧＡと GA/RS^3 との 20,000 trial 後の，集団における個体の典型的な分布状況であり，図３の結果が確認できる．

【図３】

【図４】

５．むすび

以上本論文では，先に提案したロバスト解探索型ＧＡ（GA/RS^3）について，その多次元空間における性質について解析的検討を行い，次元数の増加に対するスケールアップ特性を明らかにした．特に，ノイズの付加によるピーク値の減衰率（減衰ファクタ）が，各次元の減衰率の累積となうことを示した．また，２次元探索問題をとりあげ，GA/RS^3よりロバスト解が探索される過程を示した．

GA/RS^3に関して今後に残された問題としては，

（１）次元数と必要集団サイズとの関係の解析（４．２節参照），

（２）複雑な問題を使った評価,

（３）スケジューリング問題のような順序表現型ＧＡへの発展,

（４）適応度とロバスト性との２目的を評価とする多目的最適化型ＧＡの手法との比較,

などがある．なお，本研究の一部は，文部省科学研究費重点領域２６４－０８２３３１０５の補助金および阪南大学産業経済研究所助成の援助のもとに行われた.

参考文献

[Eshelman 91] Eshelman,L.J.: The CHC Adaptive Search Algorithm: How to Have Safe Search When Engaging in Nontraditional Genetic Recombination, Foundations of Genetic Algorithms edited by Rawlins, G. J. E., Morgan Koufmann, pp. 265-283(1991).

[Goldberg 89] Goldberg, D. E.: Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1989).

[Mathias 94] Mathias, K and Whitley, L. D.: Changing Representations During Search: A Comparative Study of Delta Coding, Evolutionary Computation, MIT Press, Vol. 2, No. 3, pp. 249-278 (1994).

[Ono 97] Ono, I, Kobayashi, S. : A Real-coded Genetic Algorithm for Function Optimization Using Unimodal Normal Distribution Crossover, Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms, pp. 246-253 (1997).

[筒井 96] 筒井，藤本: 表現型個体群探索分岐型遺伝的アルゴリズムp-fGA (Phenotypic Forking GA)，人工知能学会誌，Vol. 11, No. 4, pp. 619-628 (1996).

[筒井 97a] 筒井，藤本: ロバスト解探索型ＧＡとその多次元空間での性質，１９９７人工知能学会全国大会論文集, (1997).

[筒井 97b] 筒井，藤本: ロバスト解探索型遺伝的アルゴリズムの基礎提案，人工知能学会誌，Vol. 12, No.5, pp. 704-711 (1997).